Die Entwickelung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen des schwingenden Stabes auf Grund der Theorie der Integralgleichungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

vorgelegt

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Ernst Juretzka

Sonnabend, den 14. Oktober 1909, mittags 12½ Uhr

im Senatssaale der Universität

Vortrag

über das Thema:

„Die Bedeutung der Integralgleichungen in der mathematischen Physik"

und

Promotion.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1909.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Prof. Dr. **A. Kneser.**

Termin der mündlichen Prüfung: 21. Juli 1909.

Meinen Eltern

gewidmet,

dem Vater in treuem Gedenken,
der Mutter in kindlicher Verehrung und Dankbarkeit.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548211_0185

Inhalt.

Seite

Einleitung 7

§ 1. Reduktion linearer Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Randbedingungen auf Integralgleichungen. Entwickelung willkürlicher Funktionen 13

§ 2. Transversalschwingungen von elastischen Stäben . . 24

§ 3. Hilfsformeln zur Entwickelung unstetiger Funktionen nach der Kneserschen Methode 27

§ 4. Herstellung des Ausdruckes $M_i = \psi_i(x) \cdot \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \cdot q(\alpha) \psi_i(\alpha) d\alpha$ 29

§ 5. Die Summe der M_i 32

§ 6. Hilfssätze 35

§ 7. Anwendung auf das Beispiel des homogenen, schwingenden Stabes 41

§ 8. Anwendung einer zweiten Methode auf denselben Fall 49

Einleitung.

Ivar Fredholm gibt in seiner Abhandlung „Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet“[1]) eine Auflösungsformel der inhomogenen, linearen Integralgleichung

$$1) \qquad f(s) = \varphi(s) - \lambda . \int_a^b K(s, t) . \varphi(t) . dt .$$

Sind die Funktionen K(s, t) und f(s), ein Perameter λ und ein bestimmtes Integrationsgebiet, innerhalb dessen sich jede der beiden reellen Veränderlichen bewegen kann, gegeben, so ist die Funktion φ durch die Gleichung

$$2) \qquad \varphi(s) = f(s) - \frac{\lambda}{\delta(\lambda)} \cdot \int_a^b f(t) . \Gamma(\lambda; s, t) . dt$$

bestimmt. Dabei sind δ und Γ beständig konvergente Potenzreihen in λ. Die Entwickelungskoeffizienten sind im wesentlichen mehrfache bestimmte Integrale über Determinanten höherer Ordnung, deren Glieder durch die Funktion K(s, t) gebildet werden. Diese Integrale sind Konstante in der Reihe $\delta(\lambda)$ und Funktionen von s und t in der Reihe für $\Gamma(\lambda; s, t)$. Die durch die Gleichung 2) gegebene Auflösungsformel gilt natürlich nur für den Fall, dass $\delta(\lambda) \neq 0$ ist. Für die Nullstellen von $\delta(\lambda)$ und nur für diese ist dagegen,

[1]) Oefversigt af kongl. vetenskaps-akad. förhandlingar. Stockholm 1900. Acta mathematica 27. p. 365. 1903.

wie dies gleichfalls von Fredholm gezeigt wurde, die homogene Gleichung

$$3) \qquad \varphi(s) - \lambda . \int_a^b K(s, t) . \varphi(t) dt = 0$$

lösbar. Man nennt diese speziellen Werte λ_ν von λ die „Eigenwerte“ des „Kernes“ K(s, t) und die zugehörigen Funktionen φ_ν die „Eigenfunktionen“. Mit Hilfe verschiedener Methoden gelingt es Stekloff[1]), Hilbert[2]) und Schmidt[3]), die Existenz von Eigenfunktionen eines in s und t symmetrischen Kernes zu beweisen und die Gesetze der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen aufzustellen, welche für die Theorie der partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen von grosser Bedeutung sind.

Einfach und allgemein in ihren Voraussetzungen sind die Beweise, welche Schmidt[3]) durch Nachbildung eines berühmten Beweises von H. Schwarz findet. Die Sätze lauten bei Schmidt:

I. Zu jedem stetigen, nicht identisch verschwindenden Kern K(s, t), der in s und t symmetrisch ist, gibt es mindestens eine Eigenfunktion.

II. Es sei die stetige Funktion g(s) darstellbar durch die Gleichung

$$4) \qquad g(s) = \int_a^b K(s, t) . p(t) . dt ,$$

wo p(t) eine stetige Funktion bedeutet, dann ist

$$5) \qquad g(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) . \int_a^b g(t) . \varphi_\nu(t) . dt$$

---

[1]) Mémoires de l' Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 1904. pag. 7 etc. Annales de la Fac. de Toulouse (2) 6. p. 442. 1904.

[2]) Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1904, Heft 1 und 3.

[3]) Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Göttingen. Philos. Dissertation 1905. Math. Annal. 63.

und die Reihe rechts konvergiert absolut und gleichmässig, wenn die Eigenfunktionen φ_ν ein sogenanntes vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes K(s, t) durchlaufen.

Obwohl in der mathematischen Physik das Auftreten von Integralgleichungen schon lange bekannt war, hat man erst in neuester Zeit ihre Wichtigkeit erkannt. Im allgemeinen treten Integralgleichungen bei Randwertaufgaben auf, d. h. in den Fällen, wo es sich um physikalische Zustände auf einem begrenzten Gebiete handelt, für dessen Inneres ein sogenanntes Nahewirkungsgesetz gilt, während an den Grenzen bestimmte Bedingungen zu erfüllen sind, oder aber bestimmte Werte für den Zustand vorgeschrieben sind. Das Nahewirkungsgesetz ist meist durch eine partielle Differentialgleichung gegeben. Die schwierigsten Randwertaufgaben fast aller Gebiete der mathematischen Physik z. B. der Potentialtheorie, der magnetischen Induktion, Wärmeleitung u. s. w. können mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen erfolgreich behandelt werden. Ihre heutige Herrschaft verdankt diese Theorie insbesondere der grösseren Allgemeinheit, da wohl die meisten Resultate der früheren Methoden als Spezialfälle der Theorie der Integralgleichungen angesehen werden können. Die Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen — im physikalischen Sinne die Darstellung des gegebenen, anfänglichen Zustandes auf dem begrenzten Gebiete durch Superposition anderer bestimmter Zustände — z. B. nach trigonometrischen, Bessel'schen, Sturm'schen und andern Funktionen werden als spezielle Fälle des II. Entwickelungssatzes erkannt, wobei die Existenz letzterer als Eigenfunktionen durch den I. Satz gesichert ist. Anfängliche Mängel der Methode bestanden vor allem darin, dass in den Fällen, wo das Nahewirkungsgesetz durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben war, die zu entwickelnde Funktion mit ihren beiden ersten Ableitungen stetig sein musste und ausserdem die Randbedingungen von ihr erfüllt sein mussten. Eine Erweiterung der Entwickelungssätze war vom physikalischen Standpunkt aus nötig, insbesondere bei Problemen der Wärmeleitung

wo in praktischen Fällen die darzustellende Funktion, die hier die Anfangstemperatur eines Stabes oder einer Platte ist, im allgemeinen weder stetig noch den z. B. durch Strahlungsvorgänge bestimmten Grenzbedingungen unterworfen zu sein braucht. Diese Lücke, welche die Methode der Integralgleichungen im Gegensatz zu den bisherigen Resultaten[1]) noch aufwies, hat Kneser[2]) für die meisten Anwendungen im Falle des Auftretens einer Variabelen und in einem speziellen Falle für zwei Variabele[3]) ausgefüllt.

Die Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen, welche eine Differentialgleichung höherer Ordnung befriedigen, ist mit Hilfe der Methode der Integralgleichungen von Westfall[4]) und später von Myller erörtert worden. Die Gleichung

$$6) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(B(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \lambda . A(x) . u ,$$

die bei der Untersuchung der transversalen Schwingungen eines elastischen Stabes vorkommt, ist dabei zu Grunde gelegt[5]). Nach Daniel Bernoulli[6]), der wohl zuerst dieses Schwingungsproblem angegriffen hat, und Euler sind die freien Schwingungen von Stäben sehr ausführlich in der Mécanique von Poisson und in der Theory of Sound (vol. I.) von Lord Rayleigh behandelt. Die beiden letzteren Autoren bedienen

---

[1]) Kneser, Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der math. Physik. Math. Annalen Bd. 58. S. 81—147.

[2]) Kneser, Die Theorie der Integralgleich. u. die Darstellg. willkürlicher Funktionen in der math. Physik. Math. Annalen. Bd. 63. S. 477—524.

[3]) Kneser, Integralgleichungen und Darstellg. willkürlicher Funktionen von zwei Variabelen. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Tomo XXVII. 1909.

[4]) Westfall, Zur Theorie der Integralgleichungen. Göttingen, Philos. Dissertation 1905.

[5]) Myller, Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Beziehung zu Integralgleichungen. Göttingen. Philos. Dissertation 1906.

[6]) Comment. Acad. Petrop. A. XIII.

sich mechanischer Prinzipien. A. Davidoglon[1]) wandte zur Lösung des Problems die Picardschen Annäherungsmethoden an. Die Entwickelungssätze, zu denen Davidoglon und Myller gelangen, lassen sich dahin zusammenfassen:

Jede Funktion, die zwischen den festen Grenzen a und b mit ihren ersten vier Ableitungen stetig ist und den betreffenden Randbedingungen genügt, ist in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen, d. h. den Lösungen u(x) der gegebenen Differentialgleichung 6) für gewisse Werte von λ, fortschreitet.

Dieses Resultat kann aber weder vom mathematischen noch vom physikalischen Standtpunkte aus als abgeschlossen gelten. Gerade bei praktisch wichtigen Aufgaben sind die an die zu entwickelnde Funktion gestellten Bedingungen häufig nicht erfüllt. So ist in einer Abhandlung von Kriloff[2]), welche aus einem Vorstudium für eine Untersuchung von Schiffsvibrationen entstand und praktische Anwendungen für den Brücken- und Eisenbahnbau bringt, die zu entwickelnde Funktion unstetig in den Fällen, wo sie die Belastung einer Brücke oder einer Eisenbahnschiene darstellt. Das gleiche gilt, wenn der Stab durch einen Impuls zum Schwingen gebracht wird. In manchen Fällen erfüllt die Funktion auch die betreffenden Randbedingungen nicht, worauf Kriloff in seiner Abhandlung besonders hinweist. Es liegt aber durchaus kein Grund vor, von der darzustellenden Funktion, die in einem andern Falle die anfängliche Verbiegung eines frei-frei schwingenden elastischen Stabes darstellt, anzunehmen, dass sie den Randbedingungen genügt. Es würde dies in dem letzteren Falle bedeuten, dass der Stab an den Enden keine anfängliche Krümmung aufweise.

Die eben erwähnten Lücken in einigen Fällen mit Hilfe der Methode der linearen Integralgleichungen zu beseitigen,

---

[1]) Annales de l'école normale supérieure 1900 u. 1906. Comptes rendus 1900.

[2]) A. Kriloff in St. Petersburg. Ueber die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. Mathem. Annalen. Bd. 61. (1905). S. 211 u. f.

ist das Ziel dieser Arbeit. Es wird gezeigt werden, *dass jede Funktion, welche mit ihren ersten vier Ableitungen eine endliche Anzahl endlicher Unstetigkeiten aufweist, nach den Eigenfunktionen sich entwickeln lässt.* Insbesondere wird auch nicht verlangt, dass die darzustellende Funktion an den Grenzen des Intervalles denselben Bedingungen unterworfen sei, wie die Funktionen, nach denen man entwickelt. Dieses Ziel wird auf zwei verschiedenen Wegen erlangt. Im wesentlichen werden die beiden Methoden, welche Kneser in den zwei bereits zitierten Arbeiten[1]) auf die Probleme der Differentialgleichung zweiter Ordnung angewandt hat, auf unseren Fall übertragen. Grundlegend ist für beide die Theorie der linearen Integralgleichungen.

Eine angenehme Pflicht erfülle ich, wenn ich auch an dieser Stelle Herrn Professor Kneser, auf dessen Anregung ich diese Arbeit unternahm, für seinen Rat bei der Abfassung derselben meinen herzlichsten Dank ausspreche.

---

[1]) Siehe Seite 10 dieser Arbeit Anmerkung 2 u. 3.

§ 1. Reduktion linearer Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Randbedingungen auf Integralgleichungen. Entwickelung willkürlicher Funktionen.

In der linearen Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{d^2\left[p(x).\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right]}{dx^2} = \Lambda.q(x).\Phi(x)$$

sei die Funktion p innerhalb und an den Grenzen des Intervalles (a, b) eine stetige und positive Funktion von x, deren erste und zweite Ableitung an denselben Stellen stetig sind. Die Funktion q von x sei in dem Intervalle (a, b) stetig und positiv. Wir wollen mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen für ausgezeichnete Werte des Parameters Λ die Existenz reeller Lösungen der Gleichung 1) nachweisen, welche an den Grenzen $x = a$ bezw. b des Intervalles je eine der folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$2) \qquad \begin{cases} \text{I.} & \Phi(x) = 0 & \dfrac{d\Phi(x)}{dx} = 0 \\ \text{II.} & \Phi(x) = 0 & \dfrac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = 0 \\ \text{III.} & \dfrac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = 0 & \dfrac{d^3\Phi(x)}{dx^3} = 0. \end{cases}$$

Wir definieren den folgenden Differentialausdruck:

$$3) \qquad L(y) \equiv \frac{d^2\left[p(x).\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right]}{dx^2}.$$

Da die Funktion $p(x)$ positiv und mit ihren beiden ersten Ableitungen stetig ist, so können wir die vier unabhängigen partikulären Integrale y_1, y_2, y_3, y_4 der Differentialgleichung

$$4) \qquad L(y) = 0$$

als stetig mit ihren Ableitungen bis zur vierten einschliesslich annehmen. Aus diesen vier Lösungen von $L(y) = 0$ lässt sich eine Funktion $\Gamma(x, \xi)$ der Variabelen x und des Parameters ξ konstruieren, welche folgende Eigenschaften besitzt: Sie erfüllt innerhalb des Intervalles (a, b) als Funktion von x die Differentialgleichung 4) und ist an denselben Stellen für alle Werte $x \neq \xi$ stetig mit ihren vier ersten Ableitungen, während für $x = \xi$ die Funktion Γ und ihre zwei ersten Ableitungen stetig sind, die dritte Ableitung dagegen den Sprung 1 erleidet, so dass also

$$5) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ x=\xi-\varepsilon}} \left[\frac{d^3\Gamma}{dx^3}\right] - \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ x=\xi+\varepsilon}} \left[\frac{d^3\Gamma}{dx^3}\right] = 1$$

ist. In ihrer allgemeinsten Form wird eine solche Funktion $\Gamma(x, \xi)$ in der bereits erwähnten Arbeit von Myller[1]) angegeben. Doch lassen sich in den speziellen Fällen einfachere Funktionen angeben, welche dieselben Bedingungen erfüllen. Zu der Funktion Γ fügen wir die vier mit den zunächst noch unbestimmten Konstanten A, B, C, D multiplizierten Lösungon von $L(y) = 0$ hinzu. Die Konstanten werden durch die Forderung bestimmt, dass die neu gebildete Funktion an jedem Randpunkte eine der oben angegebenen homogenen Randbedingungen 2) zu erfüllen hat. Auf diese Weise erhält man vier lineare Gleichungen, welche zur Bestimmung der Konstanten ausreichen unter der Voraussetzung, dass keine der Lösungen von $L(y) = 0$ die betreffenden Randbedingungen bereits erfüllt. Dividieren wir noch durch $p(\xi)$, so erhalten wir schliesslich eine Funktion

$$6) \qquad G(x, \xi) = \frac{\Gamma(x,\xi) + A.y_1(x) + B.y_2(x) + C.y_3(x) + D.y_4(x)}{p(\xi)},$$

[1]) Loc. cit. S. 10.

die uns dazu dienen soll, die gegebene Differentialgleichung 1) in eine entsprechende Integralgleichung überzuführen.

Erfüllen Lösungen von $L(y) = 0$ die betreffenden Randbedingungen, so haben wir auf eine andere Weise eine Funktion zu bestimmen, die denselben Zweck wie die durch die Gleichung 6) angegebene Funktion erfüllt. Wir wollen annehmen, dass zwei Lösungen $y_3(x)$ und $y_4(x)$ von $L(y(x)) = 0$ existieren, welche die betreffenden Randbedingungen erfüllen. In diesem Falle bilden wir zunächst den Ausdruck

$$7) \quad \Gamma_1(x,\xi) = \Gamma(x,\xi) + A \cdot y_1(x) + B \cdot y_2(x) + m \cdot Y_3(x) + n \cdot Y_4(x),$$

wo $\Gamma(x, \xi)$ die bereits oben difinierte, aus den vier Lösungen von $L(y(x)) = 0$ gebildete Funktion ist, $m \cdot Y_3(x)$ bezw. $n \cdot Y_4(x)$ Lösungen der Gleichungen

$$8) \qquad \begin{aligned} L(Y(x)) &= m \cdot y_3(x) \quad \text{bezw.} \\ L(Y(x)) &= n \cdot y_4(x) \end{aligned}$$

sind. Die Koeffizienten A, B, m, n bestimmen wir durch die Forderung, dass die Funktion $\Gamma_1(x,\xi)$ die Randbedingungen zu erfüllen hat. Endlich fügen wir zu der Funktion Γ_1 noch die beiden mit den Konstanten c_1 bezw. c_2 multiplizierten Lösungen $y_3(x)$ bezw. $y_4(x)$ von $L(y) = 0$ hinzu. Die Konstanten c_1 und c_2 sind so gewählt, dass sowohl

$$9) \qquad \int_a^b (\Gamma_1 + c_1 \cdot y_3(x) + c_2 \cdot y_4(x)) \cdot y_3(x) \cdot dx = 0 \quad \text{als auch}$$

$$\int_a^b (\Gamma_1 + c_1 \cdot y_3(x) + c_2 \cdot y_4(x)) \cdot y_4(x) dx = 0$$

ist. Es ist in diesem Falle

$$10) \quad G(x, \xi) = \frac{\Gamma(x,\xi) + A \cdot y_1(x) + B y_2(x) + m \cdot Y_3(x) + n \cdot Y_4(x) + c_1 \cdot y_3 + c_2 \cdot y_4}{p(\xi)}$$

die Funktion, welche dieselben Zwecke wie die durch Gleichung 6) definierte Funktion erfüllt.

Ist nur eine Lösung, etwa $y_4(x)$ von $L(y(x)) = 0$ vorhanden, welche die vier betreffenden Randbedingungen erfüllt, so konstruieren wir ähnlich dem eben behandelten Falle eine Funktion

11) $$G(x,\xi) = \frac{\Gamma(x,\xi) + A.y_1(x) + B.y_2(x) + C.y_3(x) + n.Y_4(x) + c_1 y_4(x)}{p(\xi)},$$

wo $n.Y_4(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

12) $$L(y(x)) = n.y_4(x)$$

ist, die Koeffizienten A, B, C, n so bestimmt sind, dass von $G(x,\xi)$ die betreffenden Randbedingungen erfüllt sind, ferner c so gewählt ist, dass

13) $$\int_a^b G(x,\xi).y_4(x).dx = 0 \qquad \text{ist.}$$

Es lässt sich zeigen, dass sämtliche so konstruierte Funktionen $G(x,\xi)$ in x und ξ symmetrisch sind. Dazu bedürfen wir des eindimensionalen Green'schen Theorems für den Differentialausdruck L(y)

14) $$\int_a^b [v.L(u) - u.L(v)]dx =$$
$$= \left[p \cdot \left(v \cdot \frac{d^3u}{dx^3} - \frac{dv}{dx} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{d^3v}{dx^3} \cdot u\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{dp}{dx} \cdot \left(v \cdot \frac{d^2u}{dx^2} - u \frac{d^2v}{dx^2}\right)\right]_a^b ,$$

das man durch partielle Integration leicht erhält und jedenfalls gilt, wenn u und v mit ihren ersten vier Ableitungen innerhalb des Intervalles (a, b) stetige Funktionen von x sind. Sie gilt aber auch, wenn die vierten Ableitungen an den Stellen $x = x_1, x_2 \ldots$ innerhalb des Intervalles (a, b) endliche Sprünge aufweisen, die Funktionen selbst aber mit ihren drei ersten Ableitungen stetig sind. Man braucht

dann nur die obige Green'sche Formel für die Intervalle $(a, x_1 - \varepsilon)$, $(x_1 + \varepsilon, x_2 - \varepsilon)$ .... anzuwenden und den Grenzübergang für $\varepsilon = 0$ auszuführen. Diese Erweiterung wird später von Wichtigkeit sein.

Die Symmetrie unserer Funktionen $G(x, \xi)$ ist jetzt leicht zu beweisen. Wir setzen in der Gleichung 14) für u bezw. v die Funktionen $G(x, \xi^*)$ bezw. $G(x, {}^*\xi)$ ein, wo ξ^* bezw. ${}^*\xi$ zwei verschiedene Worte des Parameters ξ sind. Wegen der Unstetigkeit der dritten Ableitung der Funktion G für $x = \xi^*$ bezw. ${}^*\xi$ müssen wir das Intervall (a, b) in die drei Teilintervalle $(a, \xi^* - \varepsilon)$, $(\xi^* + \varepsilon, {}^*\xi - \varepsilon)$, $(\xi^* + \varepsilon, b)$ zerlegen. Indem man die Eigenschaften der Funktion $G(x, \xi)$ beachtet und den Grenzübergang für $\varepsilon = 0$ ausführt, erhält man

$$G(\xi^*, {}^*\xi) = G({}^*\xi, \xi^*).$$

Es sei, wenn w(x) eine stetige Funktion der Variabelen x bedeutet, die Funktion F(x) eine mit ihren ersten vier Ableitungen stetige Lösung der Differentialgleichung

$$15) \qquad L(F(x)) = -w(x) \quad ,$$

welche an den Grenzen des Intervalles je eine der genannten Randbedingungen 2) erfülle. Setzen wir in der Green'schen Formel 14) an Stelle von u die gegebene Lösung F(x) und an Stelle von v diejenige Funktion $G(x, \xi)$, welche zu den betreffenden Randbedingungen gehört, so bekommen wir zunächst, da wir wiederum die Unstetigkeit in der dritten Ableitung von $G(x, \xi)$ berücksichtigen müssen, die Gleichung

$$16) \quad \int_a^{\xi - \varepsilon} [G(x, \xi) . L(F(x)) - F(x) . L(G(x, \xi))] \, dx +$$

$$+ \int_{\xi + \varepsilon}^{b} [G(x, \xi) . L(F(x)) - F(x) . L(G(x, \xi))] \, dx =$$

$$= \left[p(x) \cdot \frac{d^3 G(x, \xi)}{dx^3} \cdot F(x) \right]_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} .$$

Die Funktion $G(x, \xi)$ war so konstruiert worden, dass

$$\lim_{\varepsilon=0}\left[\frac{d^3G(x,\xi)}{dx^3}\right]_{x=\xi-\varepsilon} \quad \lim_{\varepsilon=0}\left[\frac{d^3G(x,\xi)}{dx^3}\right]_{x=\xi+\varepsilon} = \frac{1}{p(\xi)}$$

ist. Führt man daher in Gleichung 16) den Grenzübergang für $\varepsilon = 0$ aus, so findet man

$$\int_a^b G(x,\xi).L(F(x)).dx - \int_a^b G(x).L(G(x,\xi)).dx = -F(\xi).$$

Nun ist, falls keine Lösung von $L(y) = 0$ vorhanden ist, die die Randbedingungen erfüllt, $L(G(x, \xi)) = 0$. In dem Falle, dass eine bezw. zwei solche Lösungen $y_4(x)$ bezw. $y_3(x)$ und $y_4(x)$ vorhanden sind, ist

$$17) \quad \mathfrak{L}(G(x,\xi)) = \frac{n.y_4(x)}{p(\xi)} \quad \text{bezw.} \quad = \frac{m.y_3(x)+n.y_4(x)}{p(\xi)}.$$

Ist daher in den letzten Fällen von $F(x)$ die Forderung erfüllt, dass

$$18) \quad \int_a^b F(x).y_4(x)dx = 0 \quad \text{bezw.}$$

$$\int_a^b F(x).y_3(x).dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_a^b F(x).y_4(x).dx = 0$$

ist, so erhalten wir in allen Fällen die Gleichung

$$\int_a^b G(x,\xi).L(F(x)).dx = -F(\xi)$$

oder wegen der Gleichung 15) und der bewiesenen Symmetrie von $G(x, \xi)$ die Integralgleichung

$$19) \quad F(x) = \int_a^b G(x,\xi).w(\xi).d\xi,$$

welche der Differentialgleichung

$$20) \qquad L(F(x)) = -w(x)$$

entspricht, wenn F(x) an den Grenzen des Intervalles (a, b) je eine der Bedingungen 2) erfüllt. Da die Green'sche Formel 14) ihre Gültigkeit behält, wenn eine der Funktion u oder v eine endliche Zahl endlicher Unstetigkeiten in der vierten Ableitung aufweist, so erhält man dasselbe Resultat, wenn F(x) Unstetigkeiten der bezeichneten Art in der vierten Ableitung hat. Ganz entsprechend lässt sich die Lösung der Differentialgleichung 1)

$$\frac{d^2\left[p(x).\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}\right]}{dx^2} = \Lambda.q(x).\Phi(x)$$

auf die Lösung der Integralgleichung

$$21) \qquad \Phi(x) = -\Lambda.\int_a^b G(x,\xi).q(\xi).\Phi(\xi).d\xi$$

zurückführen. Dies ist leicht ersichtlich, wenn keine Lösung der Gleichung $L(y) = 0$ existiert, welche die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Sind ein bezw. zwei Integrale $y_4(x)$ bezw. $y_3(x)$ und $y_4(x)$ von $L(y) = 0$ vorhanden, welche die betreffenden Randbedingungen erfüllen, so genügt eine durch die Gleichung 21) bestimmte Funktion Φ den für die Darstellung durch eine Integralgleichung erforderlichen Gleichungen 18), wie dies die Multiplikation der Gleichung 21) mit $y_4(x)dx$ bezw. $y_3(x)dx$ und $y_4(x).dx$ und Integration von a bis b ergibt, wenn man die Gleichungen

$$\int_a^b G(x,\xi).y_4(x).dx = 0 \qquad \text{bezw.}$$

$$\int_a^b G(x,\xi).y_3(x)dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_a^b G(x,\xi).y_4(x)dx = 0$$

beachtet, welche in diesen Fällen für die Funktion $G(x, \xi)$ gelten.

Dass umgekehrt eine Lösung Φ der Integralgleichung 21) auch der Differentialgleichung 1) genügt, ist durch Rechnung leicht zu zeigen. Die betreffenden Randbedingungen werden von einer solchen Funktion Φ erfüllt, da die Funktion $G(x, \xi)$ diese erfüllt.

Es bleibt nur noch übrig, zu zeigen, dass wirklich Lösungen $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x) \ldots \Phi_\nu(x)$ für eine entsprechende Reihe von Werten Λ, $\Lambda_2, \ldots \Lambda_\nu$ des Parameters Λ existieren. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{q(x)}}.$$

Dadurch geht die Integralgleichung 21) in die Integralgleichung

$$22) \qquad f(x) = -\Lambda \int_a^b G(x, \xi) . \sqrt{q(x)} . \sqrt{q(\xi)} . f(\xi) . d\xi$$

über, welche den in x und ξ symmetrischen Kern

$$23) \qquad K(x, \xi) = G(x, \xi) . \sqrt{q(x)} . \sqrt{q(\xi)}$$

enthält. Für die Integralgleichung 22) ist der von Hilbert und Schmidt[1]) unter den allgemeinsten Voraussetzungen bewiesene Fundamentalsatz anwendbar, dass es zu jedem stetigen, in x und ξ symmetrischen und nicht identisch verschwindenden Kern $K(x, \xi)$ Eigenfunktionen gibt, d. h. Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_\nu(x)$, welche die Integralgleichung 22) für bestimmte zugehörige Werte Λ, $\Lambda_2 \ldots \Lambda_\nu$ des Parameters Λ erfüllen. Damit ist zugleich die Existenz der Funktionen Φ_ν gezeigt.

Nach Schmidt[2]) lässt sich aus allen Funktionen f_ν, welche eine Integralgleichung von der Art der Gleichung 22) erfüllen, ein sogenanntes vollständiges normiertes Orthogonalsystem des Kernes $K(x, \xi)$ bilden. Wir brauchen unsere

[1]) Hilbert, loc. cit. S. 69, 72. Schmidt, loc. cit. S. 18—21.
[2]) Loc. cit. S. 12.

Funktionen f_ν nur zu normieren, (d. h. mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{\int_a^b (f_\nu((x))^2 . dx}}$ zu versehen, damit die so erhaltenen Funktionen φ_ν der Gleichung

$$\int_a^b (\varphi_\nu(x))^2 . dx = 1$$

genügen) um ein solches System zu erhalten. Da es bei unseren Kernen $K(x, \xi)$ zu jedem Eigenwerte λ_ν nur eine einzige Eigenfunktion φ_ν gibt, so sind die Eigenfunktionen, wie es sich aus ihrer Darstellung durch Gleichung 22) beweisen lässt[1]), bereits zu einander orthogonal d. h. für jedes Paar von einander verschiedener Indiges μ und ν gilt die Gleichung

$$\int_a^b \varphi_\mu(x) . \varphi_\nu(x) . dx = 0 .$$

Den Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_\nu \ldots$ mögen die Eigenwerte $\Lambda_1, \Lambda_2 \ldots \Lambda_\nu \ldots$ dem absoluten Betrage nach geordnet entsprechen. Für spätere Anwendung ist es uns sehr wichtig, dass sich der Kern $K(x, \xi)$ nach den Funktionen φ_ν entwickeln lässt[2]). Es ist

$$24) \qquad K(x, \xi) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(x) . \varphi_\nu(\xi)}{-\Lambda_\nu} ,$$

wenn die rechts stehende Reihe gleichmässig für $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq \xi \leqq b$ konvergiert.

Ein weiterer wichtiger Satz aus der Theorie der Integralgleichungen betrifft die Darstellung willkürlicher

[1]) Schmidt, loc. cit. § 4.

[2]) Schmidt, l. c. S. 12. vgl. Hilbert, l. c. S. 69–72 und Stekloff, l. c. S. 404—425.

Funktionen durch die Eigenfunktionen. Dieser Satz, welcher von E. Schmidt[1]) bedeutend vereinfacht wurde, sagt aus, dass jede stetige Funktion g(x), welche durch die Gleichung

$$25) \qquad g(x) = \int_a^b K(x, \xi) \cdot \varkappa(\xi) \cdot d\xi$$

darstellbar ist, wo $\varkappa(\xi)$ eine endliche Anzahl endlicher Sprünge aufweisen darf[2]), die Entwickelung in eine absolut und gleichmässig konvergierende Reihe

$$26) \qquad g(x) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(x)}{-\Lambda_\nu} \cdot \int_a^b \varkappa(\xi) \cdot \varphi_\nu(\xi) \cdot d\xi \qquad \text{oder}$$

$$g(x) = \sum_\nu \varphi_\nu(x) \cdot \int_a^b g(\xi) \cdot \varphi_\nu(\xi) \cdot d\xi$$

gestattet.

Mit Hilfe dieses letzten Satzes lässt sich zeigen, dass sich jede Funktion F(x), die mit ihren ersten drei Ableitungen stetig ist, in der vierten dagegen eine endliche Anzahl endlicher Sprünge aufweist, und welche den betreffenden Randbedingungen genügt, durch Funktionen, welche dieselben Randbedingungen und die Differentialgleichung 1) erfüllen, dargestellt werden kann. Bei gewissen Randbedingungen hat F(x) ausserdem noch den durch Gleichung 18) gegebenen Forderungen zu genügen. Wenn man L(F(x)) bildet und gleich $-w(x)$ setzt, so lässt, wie oben gezeigt wurde, eine solche Funktion F(x) die Darstellung

$$27) \qquad F(x) = \int_a^b G(x, \xi) \cdot w(\xi) \cdot d\xi$$

---

[1]) Schmidt, l. c. S. 15. vgl. Hilbert, l. c. S. 72—78 und Stekloff, l. c. S. 401—425.

[2]) Schmidt, l. c. S. 21. Schlussbemerkung zu § 11.

zu, oder, indem wir beachten, dass

$$K(x, \xi) = G(x, \xi) . \sqrt{q(x)} . \sqrt{q(\xi)} \qquad \text{ist,}$$

$$28) \qquad F(x) . \sqrt{q(x)} = \int_a^b K(x, \xi) . \frac{w(\xi)}{\sqrt{q(\xi)}} . d\xi \, .$$

Diese Darstellung des Produktes $F(x) . \sqrt{q(x)}$ mit Hilfe des Kernes $K(x, \xi)$ und einer stückweise stetigen Funktion $\frac{w(\xi)}{\sqrt{q(\xi)}}$ ermöglicht die Anwendung des zuletzt genannten Satzes. Es ist demnach

$$F(x) . \sqrt{q(x)} = \sum_\nu \varphi_\nu(x) . \int_a^b F(\xi) . \sqrt{q(\xi)} . \varphi_\nu(\xi) . d\xi$$

oder, wenn wir die Funktionen

$$29) \qquad \Psi_\nu = \frac{\varphi_\nu(x)}{\sqrt{q(x)}} \qquad \text{einführen,}$$

$$30) \qquad F(x) = \sum_\nu \Psi_\nu(x) . \int_a^b F(\xi) . q(\xi) . \Psi_\nu(\xi) . d\xi \, .$$

Da die Funktionen Ψ_ν eine Darstellung durch die Integralgleichung 21) erlauben, so genügen sie der Differentialgleichung 1) und erfüllen die betreffenden Randbedingungen.

Bevor wir an die Erweiterung des in der letzten Gleichung ausgesprochenen Entwickelungssatzes gehen, den Myller im wesentlichen[1]) in seiner bereits mehrfach erwähnten Arbeit abgeleitet hat, wollen wir kurz die physikalische Anwendung der in diesem Abschnitt behandelten Theorie erörtern.

---

[1]) Myller, loc. cit. Die Bemerkung auf S. 23 Zeile 24 enthält offenbar ein Versehen.

§2. Transversalschwingungen von elastischen Stäben.

Die im Verhältnis zur Stablänge als klein angenommenen, transversalen Schwingungen eines dünnen, elastischen Stabes, bei dem das Trägheitsvermögen eines jeden Querschnitts auf dessen Mittelpunkt konzentriert gedacht werden kann, führen auf die folgende Randwertaufgabe:

Es soll die seitliche Verschiebung y der Punkte der Stabaxe, deren Abscissen, parallel der Gleichgewichtslage gemessen, durch das Verhältnis x ihrer Entfernung von einem Endpunkte zur Gesamtlänge des Stabes bestimmt sind, als eine solche Funktion von x und der Zeit t bestimmt werden, dass die partielle Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{\partial^2\left[p(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]}{\partial x^2} = - \, q(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

für alle Punkte der Stablänge gilt. Dabei bedeutet p den mit x veränderlichen Biegungswiderstand und q die Masse pro Längeneinheit. An den Endpunkten des Stabes sind von der gesuchten Funktion y für ein festgeklemmtes bezw. gehaltenes oder freies Ende die Randbedingungen I bezw. II oder III des vorigen Abschnittes zu erfüllen.

Um die Gleichung 1) zu integrieren, setzen wir

$$2) \qquad y(x, t) = \sum_i \Psi_i(x) \cdot \left(C_i \cdot \cos(\sqrt{\Lambda_i} t) + C'_i \cdot \sin(\sqrt{\Lambda_i} t)\right),$$

wo C_i und C'_i Konstanten, Λ_i Parameter und $\Psi_i(x)$ Funktionen von x allein sind. Man erhält aus Gleichung 1) für $\Psi_i(x)$ die Gleichung

$$3) \qquad \frac{d^2\left(p(x) \cdot \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}\right)}{dx^2} = \Lambda_i \cdot q(x) \cdot \Psi_i(x) \, .$$

Wie bereits oben gezeigt wurde, existieren für eine Reihe von Werten $\Lambda_1, \Lambda_2 \ldots \Lambda_i$ nicht verschwindende zugehörige

Lösungen $\Psi_1, \Psi_2 \ldots \Psi_i$ dieser Gleichung, welche die betreffenden Randbedingungen erfüllen.

Setzen wir in der Gleichung 2) $t = 0$, so bekommen wir

$$y(x, 0) = \sum_i C_i . \Psi_i(x) \quad .$$

Diese Funktion $y(x, 0)$ wird im allgemeinen eine willkürliche Funktion $F_1(x)$ sein, welche die anfängliche Verbiegung des Stabes darstellt. Ebenso wird die Geschwindigkeit im Anfangsmoment $t = 0$

$$\frac{d}{dt}\left[y(x, t)\right]_{t=0} = \sum_i C'_i \, . \, \sqrt{\Lambda_i} \, . \, \Psi_i \, (x)$$

eine gegebene Funktion $F_2(x)$ sein. Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Koeffizienten C_i bezw. C_i' durch

$$C_i = \int_0^1 F_1(x) . q(x) . \Psi_i \, (x) . dx \qquad \text{bezw.}$$

$$\sqrt{\Lambda_i} \, . \, C'_i = \int_0^1 F_2(x) . q(x) . \Psi_i \, (x) . dx$$

bestimmt sind, wenn F_1 und F_2 mit ihren ersten drei Ableitungen stetige, in der vierten wenigstens stückweise stetige Funktionen von x sind, welche die Randbedingungen erfüllen. In zwei der möglichen sechs Kombinationen der Randbedingungen kommt es vor, dass Lösungen der Gleichung

$L(y) \equiv \dfrac{\delta^2\left(p(x)\dfrac{\delta^2 y}{\delta x^2}\right)}{\delta x^2} = 0$ auftreten, die die Randbedingungen erfüllen. Es ist dies die Lösung x, wenn für $x = 0$ die Bedingung II für $x = 1$ die Bedingung III gilt, und die Lösungen 1 und x, wenn für beide Enden die III. Randbedingung gilt. In diesen Fällen haben F_1 und F_2 die Bedingungen 18) des vorigen Abschnittes zu erfüllen. Genügen die gegebenen Funktionen F diesen nicht, so lassen

sich leicht Konstante a, bezw. b und c so bestimmen, dass die neuen Funktionen F—a.x bezw. F—b.x—c die genannten und die Randbedingungen erfüllen. Bezeichnen wir die zu F_1 bezw. F_2 gehörigen Konstanten mit a_1, b_1, c_1 bezw. a_2, b_2, c_2, so ergibt sich im Falle frei = frei als endgültige Lösung

$$y(x,t) = c_1 + b_1 . x + \sum_i C_i . \Psi_i(x) . \cos(\sqrt{\Lambda_i} . t) +$$

$$c_2 t + b_2 . x . t + \sum_i C'_i . \Psi_i(x) . \sin(\sqrt{\Lambda_i} . t),$$

wo

$$C_i = \int_0^1 (F_1(x) - c_1 - b_1 . x) . q(x) . \Psi_i(x) . dx ,$$

$$C'_i = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_i}} \cdot \int_0^1 (F_2(x) - c_2 - b_2 . x) . q(x) . \Psi_i(x) . dx ,$$

$$c_1 = 6 . \int_0^1 (2x - 1) . F_1(x) . dx ,$$

$$c_2 = 6 . \int_0^1 (2x - 1) . F_2(x) . dx ,$$

$$b_1 = 2 . \int_0^1 (2 - 3x) . F_1(x) . dx ,$$

$$b_2 = 2 . \int_0^1 (2 - 3x) . F_2(x) . dx \quad \text{ist.}$$

Im Falle gehalten = frei fallen die Koeffizienten c fort und an Stelle von b_1 bezw. b_2 tritt

$$a_1 = 3 . \int_0^1 x . F_1(x) . dx \qquad \text{bezw.}$$

$$a_2 = 3 \cdot \int_0^1 x \cdot F_2(x) \cdot dx \ .$$

In den übrigen vier Fällen verschwinden auch die Koeffizienten b.

Vom physikalischen Standpunkt ist zu bemerken, dass durch die Koeffizienten a, b, c Verschiebungen und Rotationen zum Ausdruck gebracht werden, die in den Fällen frei = frei und gehalten = frei möglich sind.

§ 3. Hilfsformeln zur Entwickelung unstetiger Funktionen nach der Kneserschen Methode.

Um das Verfahren, welches von Kneser[1]) auf die entsprechenden Probleme der Differentialgleichung zweiter Ordnung angewandt wird, auf unsern Fall übertragen zu können, benutzen wir die Eigenschaften der oben konstruierten Funktionen $G(x, \xi)$ und ihre Beziehungen zu den Eigenfunktionen $\psi_i(x)$. Aus den Gleichungen 23, 24 und 29 des § 1 geht hervor, dass

A) $$G(x, y) = \sum_i \frac{\psi_i(x) \cdot \psi_i(y)}{-\Lambda_i}$$

ist, wenn für $0 \leqq x \leqq 1$ und $0 \leqq y \leqq 1$ die rechtsstehende Reihe gleichmässig konvergiert. Dies wird später im besonderen Falle gezeigt werden. Da sich ferner zeigen lassen wird, dass auch die Reihen

$$\sum_i \frac{\psi_i'(x) \cdot \psi_i(y)}{-\Lambda_i}, \qquad \sum_i \frac{\psi_i''(x) \cdot \psi_i(y)}{-\Lambda_i}$$

im ganzen Intervalle für x und y gleichmässig konvergieren, so gelten die Beziehungen

---

[1]) Math. Annalen Bd. 63. Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung wilkürlicher Funktionen in der mathem. Physik.

B) $$\frac{dG(x,y)}{dx} = G'(x,y) = \sum_i \frac{\psi_i'(x)\cdot\psi_i(y)}{-\Lambda_i}$$

und

C) $$\frac{d^2G(x,y)}{dx^2} = G''(x,y) = \sum_i \frac{\psi_i''(x)\cdot\psi_i(y)}{-\Lambda_i} .$$

Die Formel

D) $$\frac{d^3G(x,y)}{dx^3} = G'''(x,y) = \sum_i \frac{\psi_i'''(x)\cdot\psi_i(y)}{-\Lambda_i}$$

soll dagegen nur gelten, wenn $x \neq y$ ist. Es wird sich ferner nachweisen lassen, dass die Reihe $\sum_i \frac{\psi_i'''(x)\cdot\psi_i(y)}{-\Lambda_i}$ für $x = y$ den Mittelwert der beiden Werte annimmt[1]), welche die Reihe erhält, wenn man von grösseren oder kleineren Werten von x dieser Stelle sich nähert.

Bezeichnen wir durch $f(x+0)$ bezw. $f(x-0)$ Grenzwerte, denen sich eine Funktion $f(x)$ nähert, falls man von oben bezw. unten her die unabhängige Variabele in den Wert x rücken lässt, so ist

E) $$\frac{1}{2}[G'''(x+0, x) + G'''(x-0, x)] = \sum_i \frac{\psi_i'''(x)\cdot\psi_i(x)}{-\Lambda_i} .$$

Schliesslich benötigen wir noch für Randpunkte, an denen die Bedingung III auftritt, das Bestehen der Gleichungen

F) $$\sum_i \frac{\psi_i'''(x)\cdot\psi_i(x)}{-\Lambda_i} - G'''(x\pm 0, x) = \pm\frac{1}{p(x)} ,$$

wobei das positive Vorzeichen für $x = 0$, das negative für $x = l$ gilt. Die Reihe auf der linken Seite der Gleichung

---

[1]) In derselben Weise, wie etwa die bekannte Reihe $\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$ für $x = 0$ dem Mittelwert 0 der beiden Werte $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ annimmt, denen die Reihe für hinreichend kleines $+\varepsilon$ bezw. $-\varepsilon$ sich nähert.

F) verschwindet, da $\psi_i'''(x)$ in diesem Falle verschwindet. Dass $G'''(x \pm 0, 0) = + \frac{1}{p(x)}$ ist, lässt sich in den betrachteten Fällen leicht zeigen.

§ 4. Herstellung des Ausdruckes

$$M_i = \psi_i(x) \cdot \int_{\xi}^{\eta} f(\alpha) \cdot q(\alpha) \cdot \psi_i(\alpha) d\alpha .$$

Wir bilden unter Anwendung der Formeln A) bis F) des vorigen Paragraphen zunächst den für die Darstellung nach Fourier'scher Weise massgebenden Ausdruck

1) $$M_i = \psi_i(x) \cdot \int_{\xi}^{\eta_1} f(\alpha) \cdot q(\alpha) \cdot \psi_i(\alpha) d\alpha .$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Funktion f(x), welche wir mit den Funktionen F—c—bx des § 2 identifizieren, mit ihren ersten vier Ableitungen auf der Strecke $\alpha = \xi$ bis $\alpha = \eta$, welche ihrerseits innerhalb der Strecke $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ liege, stetig ist. Ferner nehmen wir an, dass x ausserhalb des Intervalles $\alpha = \xi$ bis $\alpha = \eta$ liegt, oder aber mit ξ oder η zusammenfällt. Aus der Gleichung 3) des § 2 geht hervor

2) $$\psi_i(x) = \frac{1}{\Lambda_i} \cdot \frac{(p(x) \cdot \psi''(x))''}{q(x)} .$$

Wir setzen diesen Wert für ψ_i unter dem Integral des Ausdruckes M_i ein und integrieren wiederholt partiell. Um das wiederholte Hinschreiben eines grossen Teiles der Gleichungen zu vermeiden, bemerken wir, dass ein in [] Klammern eingeschlossener Wert bedeutet, dass er mittelst partieller Integration durch die beiden unmittelbar folgenden Ausdrücke ersetzt wird. Folgendes Schema soll zur Verdeutlichung dienen. Ist

$$X = A + B$$
$$B = B_1 + B_2$$
$$B_2 = B_3 + B_4 ,$$

so bedeutet

$$X = A + [B] + B_1 + [B_2] + B_3 + B_4 ,$$

dass $X = A + B_1 + B_3 + B_4$ ist.

Es ist dementsprechend

$$3) \quad M_i = \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i} \cdot \int_\xi^\eta f(\alpha) . (p(\alpha) . \psi_i''(\alpha))'' d\alpha =$$

$$= f(\alpha).(p(\alpha).\psi_i''(\alpha))' . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta - \left[\frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i} . \int_\xi^\eta f'(\alpha).(p(\alpha).\psi_i''(\alpha))' . d\alpha \right]$$

$$- f'(\alpha). p(\alpha).\psi_i''(\alpha) . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta + \left[\frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i} . \int_\xi^\eta f''(\alpha). p(\alpha).\psi_i''(\alpha) . d\alpha \right]$$

$$+ f''(\alpha). p(\alpha).\psi_i'(\alpha) . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta - \left[\frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i} . \int_\xi^\eta (f''(\alpha).p(\alpha))'.\psi_i'(\alpha) . d\alpha \right]$$

$$-(f''(\alpha). p(\alpha))'.\psi_i(\alpha) . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta + \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i} . \int_\xi^\eta (f''(\alpha).p(\alpha))''\psi_i(\alpha) . d\alpha$$

oder

$$4) \quad M_i = f(\alpha) . (p(\alpha).\psi_i''(\alpha))' . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta - f'(\alpha).p(\alpha).\psi_i''(\alpha) . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta$$

$$+ f''(\alpha) . p(\alpha) . \psi_i'(\alpha) . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta - (f''(\alpha).p(\alpha))'.\psi_i(\alpha) . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta$$

$$+ \int_\xi^\eta (f''(\alpha) . p(\alpha))'' . \psi_i(\alpha) . \frac{\psi_i(x)}{\Lambda_i} . d\alpha .$$

Wir bilden nunmehr die Reihe $R(x)^{\xi,\eta} = \sum_i M_i$. Da gemäss unserer Annahme A) die Summe $\sum \frac{\psi_i(\alpha)\cdot\psi_i(x)}{-\Lambda_i}$ gleichmässig konvergiert, so kann man bei der Summe, die dem letzten Gliede von M_i entspricht, die Reihenfolge der Summation und Integration vertauschen und $\sum \frac{\psi_i(\alpha)\cdot\psi_i(x)}{-\Lambda_i}$ durch $G(\alpha, x)$ ersetzen. Wir erhalten, indem wir noch das letzte Glied wiederholt partiell integrieren

5) $$R(x)^{\eta,\xi} = f(\alpha)\cdot p(\alpha)\sum_i \frac{\psi_i'''(\alpha)\cdot\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta +$$

$$f(\alpha)\cdot p'(\alpha)\cdot\sum_i \frac{\psi_i''(\alpha)\cdot\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta - f'(\alpha)\,p(\alpha)\cdot\sum_i \frac{\psi_i''(\alpha)\cdot\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta$$

$$+ f''(\alpha)\,p(\alpha)\sum_i \frac{\psi_i'(\alpha)\cdot\psi_i(x)}{\Lambda_i}\Big|_\xi^\eta + (f''(\alpha)\cdot p(\alpha))'\cdot G(\alpha, x)\Big|_\xi^\eta$$

$$-\left[\int_\xi^\eta (f''(\alpha)\cdot p(\alpha))''\cdot G(\alpha, x)\cdot d\alpha\right] -$$

$$-(f''(\alpha)\cdot p(\alpha))'\cdot G(\alpha, x)\Big|_\xi^\eta + \left[\int_\xi^\eta (f''(\alpha)\cdot p(\alpha))'\cdot G'(\alpha, x)\cdot d\alpha\right]$$

$$+ f''(\alpha)\cdot p(\alpha)\cdot G'(\alpha, x)\Big|_\xi^\eta - \left[\int_\xi^\eta f''(\alpha)\cdot p(\alpha)\cdot G''(\alpha, x)\cdot d\alpha\right]$$

$$-f'(\alpha)\cdot p(\alpha)\cdot G''(\alpha, x)\Big|_\xi^\eta + \left[\int_\xi^\eta f'(\alpha)\cdot(p(\alpha)\cdot G''(\alpha, x))'\cdot d\alpha\right]$$

$$+ f(\alpha)\cdot(p(\alpha)\cdot G''(\alpha, x))'\Big|_\xi^\eta - \int_\xi^\eta f(\alpha)\cdot(p(\alpha)\cdot G''(\alpha, x))''\cdot d\alpha.$$

Der durch diese Gleichung für $R(x)^{\xi,\eta}$ erhaltene Ausdruck lässt sich bedeutend vereinfachen. Die in [] Klammern eingeschlossenen Glieder fallen fort, da sie ja durch die folgenden Glieder ersetzt sind. Infolge der Formeln A) B) C) des § 3 fallen, wie leicht ersichtlich, in der Gleichung sämtliche Glieder fort, welche die Funktion G oder einihrer beiden ersten Ableitungen enthalten, da die diesen Werten entsprechenden Summen die entgegengesetzten Vorzeichen aufweisen. Der Ausdruck für $R(x)^{\xi,\eta}$ nimmt daher die Form an

$$6) \quad R(x)^{\xi,\eta} = f(\xi) \cdot p(\xi) \cdot \left[\sum_i \frac{\psi_i'''(\xi) \cdot \psi_i(x)}{-\Lambda_i} - G'''(\xi+0,x) \right]$$

$$f(\eta) \cdot p(\eta) \cdot \left[\sum_i \frac{\psi_i'''(\eta) \cdot \psi_i(x)}{-\Lambda_i} - G'''(\eta-0,x) \right]$$

$$- \int_\xi^\eta f(\alpha) \cdot (p(\alpha) \cdot G''(\alpha, x))'' \, d\alpha \, .$$

§ 5. Bildung von $R(x)^{0,1}$.

Wir teilen das Intervall von 0 bis 1 in Teilintervalle, innerhalb deren die zu entwickelnde Funktion f(x) mit ihren ersten vier Ableitungen stetig ist, nach dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccccc} \overbrace{\quad}^{} & & \overbrace{\quad}^{} & & \overbrace{\quad}^{} & & & & \overbrace{\quad}^{} & & \overbrace{\quad}^{} \\ \xi_0 & \eta_{10} & & \xi_2 & & \eta_{12} & \cdots & \xi_{n-1} & & \eta_{1n-1} & \\ 0 & & \underbrace{\quad}_{} & & \underbrace{\quad}_{} & & & & & & 1 \\ & \xi_1 & & \eta_{11} & & & \cdots & & \eta_{1n-2} & & \end{array} \, .$$

Dann haben wir für die Lage von x drei Fälle zu unterscheiden:

α) x liegt innerhalb eines Teilintervalles, etwa des $(p+1)$sten,

β) x fällt mit einem Endpunkte eines Teilintervalles zusammen, etwa mit $\xi_p = \eta_{p-1}$,

γ) x fällt mit einem Randpunkte 0 oder 1 zusammen.

Bilden wir nach Fourier'scher Weise die nach den Eigenfunktionen $\psi_i(x)$ fortschreitende Reihe, so erhalten wir

1) $\sum_i M_i = R(x) = R(x)^{0,1} = R(x)^{\xi_0,\eta_0} + R(x)^{\xi_1,\eta_1} + \ldots R(x)^{\xi_{n-1},\eta_{n-1}}$.

Ersetzen wir die R(x) durch die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung 6) im § 4, so sehen wir zunächst, dass das dabei entstehende Integral

$$\int_0^1 f(\alpha).(p(\alpha).G''(\alpha,x))''.d\alpha$$

verschwindet, da entweder auf der ganzen Strecke von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ die Funktion $G(\alpha,x)$ die Gleichung $(p(\alpha).G''(\alpha,x))'' = 0$ erfüllt oder aber $(p(\alpha).G''(\alpha,x))'' = k_1.\alpha$ bezw. $k_1 + k_2.\alpha$ ist, wo k_1 und k_2 Konstante sind. Im letzteren Falle erfüllt aber nach unserer Annahme[1]) unsere gegebene Funktion f die Gleichung $\int_0^1 \alpha.f(\alpha)d\alpha = 0$ bezw. $\int_0^1 f(\alpha)d\alpha = 0$ und $\int_0^1 \alpha.f(\alpha)d\alpha = 0$.

Im Falle α) liegt x innerhalb des $(p+1)$sten Teilintervalles. Bilden wir der Reihe nach die Summanden der Gleichung 1) nach Angabe der Gleichung 6) des vorigen Paragraphen, so sehen wir, dass gemäss unserer Annahme D) alle Summanden bis auf den Summanden $R(x)^{\xi_p,\eta_p}$ verschwinden. Es ist daher, da wir dieses Teilintervall nochmals durch x teilen müssen,

$$R(x) = R(x)^{\xi_p,\eta_p} = R(x)^{\xi_p,x} + R(x)^{x,\eta_p} \qquad \text{oder}$$

α) $R(x) = f(x).p(x).[G'''(x-0,x) - G'''(x+0,x)] = f(x)$,

da ja gemäss § 1 $G(x,\xi)$ so bestimmt ist, dass

$$G'''(x-0,x) - G'''(x+0,x) = \frac{1}{p(x)} \quad \text{ist.}$$

[1]) Siehe den Anfang von § 4 dieser Arbeit.

Im Falle β) ist $x = \xi_p = \eta_{p-1}$. Gemäss unserer Annahme D) bleiben in der Reihe für R(x) nur zwei Summanden von Null verschieden. Wir erhalten

$$R(x) = R(x)^{\xi_p - 1,\ x-0} + R(x)^{x+0,\ \eta_p} =$$

$$= f(x+0) \cdot p(x) \left[\sum_i \frac{\psi_i'''(x) \cdot \psi_i(x)}{-\Lambda_i} - G'''(x+0, x) \right] +$$

$$+ f(x-0) \cdot p(x) \left[\sum_i G'''(x-0, x) - \sum \frac{\psi_i'''(x) \cdot \psi_i(x)}{-\Lambda_i} \right]$$

und, da gemäss E)

$$\sum_i \frac{\psi_i'''(x) \cdot \psi_i(x)}{-\Lambda_i} = \frac{1}{2} \left[G'''(x+0, x) + G'''(x-0, x) \right]$$

ist, so ergibt sich

$$R(x) = f(x+0) \cdot p(x) \cdot \frac{1}{2} [G'''(x-0, x) - G'''(x+0, x)] +$$

$$+ f(x-0) \cdot p(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot [G'''(x-0, x) - G'''(x+0, x)]$$

oder schliesslich

$$\beta) \qquad R(x) = \frac{1}{2} \cdot [f(x+0) + f(x-0)] \ .$$

Im letzten Falle γ) endlich bleibt gemäss unserer Annahme D) von den Summanden der Reihe für R(x) nur der erste von Null verschieden, wenn $x = 0$ ist. Es ist

$$R(0) = R(0)^{0+0, \eta_0} = f(0) \cdot p(0) \cdot \left[\sum_i \frac{\psi_i'''(0) \cdot \psi_i(0)}{-\Lambda_i} - G'''(0+0, 0) \right]$$

und daher im Falle des Auftretens der Randbedingung III gemäss der Formel F)

$$\gamma) \qquad R(0) = f(0) \ .$$

Ist $x = 1$, so bleibt wegen der Annahme D) nur der letzte Summand in der Reihe R(x) bestehen, und wir erhalten

$$R(1) = R(1)^{\xi_n \quad 1,1-0} = f(1)p(1)\left[\sum_i \frac{\psi_i'''(1)\psi_i(1)}{-\Lambda_i} - G'''(1-0,1)\right]$$

oder gemäss der Formel F) bei der Randbedingung III

$$\gamma_2)\ R(1) = f(1).$$

Bei dem Auftreten der Randbedingungen I oder II ist natürlich R(x) an dem betreffenden Endpunkte gleich Null, da ja die Eigenfunktionen, nach denen wir entwickeln, an den Enden des Intervalles verschwinden. Dagegen bleiben die Gleichungen α) und β) bestehen für $x = 0 + \varepsilon$ und $x = 1 - \varepsilon$, wenn ε eine beliebig kleine positive Konstante ist. Es wird daher auch in diesem Falle die gegebene Funktion f bei beliebiger Annäherung an den betreffenden Randpunkt dargestellt, ohne dass die zu entwickelnde Funktion die Randbedingungen zu erfüllen hat.

Jede Funktion also, die mit ihren ersten vier Ableitungen auf der Strecke von $x = 0$ *bis* $x = 1$ *nur eine endliche Anzahl endlicher Unstetigkeiten aufweist, wird innerhalb dieses Intervalles durch die Gleichung*

$$R(x) = \frac{1}{2} \cdot [f(x + 0) + f(x - 0)]$$

dargestellt. Im Falle des Auftretens der Randbedingung III gilt für denjenigen Endpunkt, an dem diese Randbedingung zu erfüllen ist, die Gleichung

$$R(0) = f(0) \quad \textit{bezw.} \quad R(1) = f(1).$$

§ 6. Hilfssätze.

Wir wollen nunmehr an dem Beispiele des homogenen Stabes, welcher an beiden Enden frei schwingt, die Gültigkeit der Formeln A) bis F) des § 3 nachweisen und damit die Anwendbarkeit der Kneserschen Methode dartun. Dazu benötigen wir mehrerer Hilfssätze:

Hilfssatz a): Die positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$1)\ \cos x . \mathfrak{Cof}\, x = 1$$

werden durch

$$2)\ x = a_n - (-1)^n \cdot \frac{\beta}{e^{a_n}}$$

angegeben, wobei $a_n = \frac{\pi}{2}.(2n+1)$ *gesetzt ist und* β *für alle positiven ganzen Zahlen* n *grösser als Null und kleiner als* e, *die Basis des natürlichen Logarithmensystems, ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ keine Nullstelle der Gleichung 1) liegt. Es ist bekanntlich

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \text{ und } \mathfrak{Cof}\, x = \frac{1 + \mathfrak{Tg}^2\frac{x}{2}}{1 - \mathfrak{Tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Gl. 1) geht demnach über in

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = -\frac{1 - \mathfrak{Tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathfrak{Tg}^2\frac{x}{2}}, \text{ woraus}$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\, \mathfrak{Tg}\frac{x}{2}$ folgt.

Bildet man die Ableitung

$$\frac{d\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{x}{2}\right]}{d\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\frac{x}{2}},$$

so erkennt man leicht, dass von $x = 0$ an, wo die beiden Kurven $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ und $y = \mathfrak{Tg}\frac{x}{2}$ sich berühren, bis $x = \pi$ diese beständig positiv ist. Es kann daher kein Schnittpunkt dieser beiden Kurven und folglich auch keine Nullstelle von 1) in dem Intervalle $(0,\pi)$ liegen. Auch $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\mathfrak{Tg}\frac{x}{2}$ liefert in demselben Intervalle keine Nullstelle, da dort $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ und $-\mathfrak{Tg}\frac{x}{2}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Jetzt betrachten wir die Kurven A) $\cos x = y$ und

B) $\frac{1}{\mathfrak{Cof}\, x} = y.$

Dieselben berühren einander in ihrem Schnittpunkte mit der y-Achse. Da in dem Intervalle $(0,\pi)$ die Gleichung 1) keine Wurzeln hat, und da in dem Intervalle $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ die Ordinaten der Kurven A) und B) entgegengesetztes Vorzeichen haben, so erhalten wir den ersten Schnittpunkt der beiden Kurven und damit eine Nullstelle von Gl. 1) erst für $x > \frac{3\pi}{2}$. $\frac{1}{\mathfrak{Cof}\, x}$ erhält für $x = a_1 = 4{,}7124$ den Wert 0,018. In ihrem weiteren Verlauf nähert sich die Kurve B) asymptotisch der x-Achse. Die Kurve A) schneidet die x-Achse in den Punkten $x = a_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ unter 45°. Wir ersehen daraus, dass die Abscissen der Schnittpunkte der beiden Kurven von dem Worte a_x abwechselnd um annähernd $\pm \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, a_n}$, für grosses n um $\frac{2}{e^{a_n}}$ verschieden sind. Diese Betrachtung führt uns dazu, den Wert der n ten Nullstelle der Gl. 1) gleich $a_n - (-1)^n \cdot \frac{\beta}{e^{a_n}}$ zu setzen, wo β, wie sich nachweisen lässt, zwischen 0 und e liegt. Wir setzen den eben angegebenen Wert in die Gl. 1) ein und erhalten leicht

$$\sin \frac{\beta}{e^{a_n}} \cdot \mathfrak{Cof}\left\{a_n - (-1)^n \cdot \frac{\beta}{e^{a_n}}\right\} - 1 = 0.$$

In dem Ausdruck

$$f(a,\beta) = \sin \frac{\beta}{e^a} \cdot \mathfrak{Cof}\left\{a - \frac{\beta}{e^a}\right\} - 1$$

durchlaufe a das ganze Intervall von a_1 bis a_∞. Unsere Schlussweise geht dahin, zu zeigen, dass zunächst für ein gerades x — einem solchen entspricht ja unsere Funktion $f(a,\beta)$ — der Wert f(a,e) positiv wird, während der Wert $f(a,0) = -1$, also negativ ist. Daraus kann das Vorhandensein einer Nullstelle für einen Wert β zwischen o und e gefolgert werden. Dasselbe gilt dann für ein ungerades n, da in diesem Falle f(a, e) a fortiori positiv wird und $f(a,0) = -1$ bleibt.

Um zu beweisen, dass f(a,e) im ganzen Intervall (a_1, a_∞) positiv ist, genügt es, zu zeigen, dass die Ableitung $\frac{df(a,e)}{da}$ zwischen den Werten

$$f(a_1,e) = 0{,}304\ldots \text{ und } f(a_\infty,e) = \frac{e}{2} - 1 = 0{,}359\ldots$$

beständig positiv ist. Setzt man $\frac{e}{e^a} = u$ und beachtet man, dass $\mathfrak{Cof}\, x = \mathfrak{Sin}\, x + e^{-x}$ ist, so erhält man

$$\frac{df(a,e)}{da} = \mathfrak{Sin}\,(a-u).[(1+u).\sin u - u\cos u] - u.\cos u.e^{-(a-u)}.$$

Für das Vorzeichen ist offenbar nur der Wert der [] Klammer massgebend, der gleich

$$u^2 + u^3.\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) - \frac{u^4}{3!} - u^5\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + \ldots$$

ist. Der Wert der Summe der auf das Glied u^2 folgenden, absolut genommenen Glieder ist kleiner als die Summe

$$\frac{u^3}{3}\cdot(1 + u + u^2 + \ldots) = \frac{u^3}{3.(1-u)},$$ welche

gleich $0{,}0082\ldots .u^2_1$ für den grössten Wert $u_1 = e^{1-a_1} = 0{,}024\ldots$ von u ist. Demnach bestimmt um so mehr für grössere a und dementsprechend kleinere u das erste Glied u^2 den Wert der [] Klammer und damit gleichzeitig denjenigen von $\frac{df(a,e)}{da}$ als positiv.

Hilfssatz b). Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{Sin}(\lambda_\nu . s)}{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu}$, *wobei* $\lambda_\nu = \frac{\pi}{2}(2\nu+1)$ *ist, konvergiert gleichmässig für* $0 \leq s \leq 1-\varepsilon$, *wenn* ε *eine beliebig kleine positive Grösse ist.*

Beweis: Es ist $\sum_\nu \frac{\mathfrak{Sin}(\lambda_\nu s)}{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu} = \frac{1}{2}\sum_\nu \frac{e^{\lambda_\nu \cdot s} - e^{-\lambda_\nu \cdot s}}{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu} =$

$$= \frac{1}{2}\sum_\nu \frac{e^{\lambda_\nu \cdot s}}{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu} - \frac{1}{2}\sum_\nu \frac{e^{-\lambda_\nu \cdot s}}{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu}.$$

Konvergiert die erste dieser beiden Reihen, so gilt dies um so mehr von der zweiten. Es genügt daher, die erste

Reihe zu betrachten. Der Quotient zweier Glieder $u_{\nu+1}$ und u_ν der ersten Reihe ist

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{e^{\lambda_{\nu+1}\cdot s}}{e^{\lambda_\nu \cdot s}} \cdot \frac{e^{\lambda_\nu} - e^{-\lambda_\nu}}{e^{\lambda_{\nu+1}} - e^{-\lambda_{\nu+1}}} =$$

$$= \frac{e^{\lambda_{\nu+1}\cdot s} \cdot e^{\lambda_\nu} \cdot (1 - e^{-2\lambda_\nu})}{e^{\lambda_\nu \cdot s} \cdot e^{\lambda_{\nu+1}} \cdot (1 - e^{-2\lambda_{\nu+1}})}.$$

Der Wert des Bruches $\frac{1-e^{-2\lambda_\nu}}{1-e^{-2\lambda_{\nu+1}}}$ ist kleiner als 1 und nähert sich bei grossem ν dem Wert 1. Es bleibt zu untersuchen

$$\frac{e^{\lambda_{\nu+1}\cdot s} e^{\lambda_\nu}}{e^{\lambda_\nu \cdot s} \cdot e^{\lambda_{\nu+1}}} = \frac{e^{s(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)}}{e^{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu}} =$$

$$= e^{(s-1)(\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu)} = e^{(s-1)\cdot\pi} = \frac{1}{e^{(1-s)\cdot\pi}}.$$

Der Wert dieses Quotienten bleibt für unser Intervall $0 \leq s \leq 1-\varepsilon$ um eine angebbare positive Grösse kleiner als 1.

Also ist $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} < 1-\eta$, wo η eine positive Grösse ist, für jedes s des Intervalles. Damit ist die gleichmässige Kongruenz unserer Reihe bewiesen.

Hilfssatz c): Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_\nu s)}{\lambda_\nu} \cdot (-1)^\nu$ *konvergiert für* $0 \leq s < 1-\delta$, *wo* δ *eine beliebig kleine positive Grösse ist, gleichmässig, wenn* $\lambda_\nu = \frac{\pi}{2}(2\nu+1)$ *ist.*

Beweis: Wir setzen $u = \frac{\pi s}{2}$, dann ist unsere Reihe gleich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\cdot\frac{\pi s}{2}\right]}{\frac{\pi}{2}(2\nu+1)} \cdot (-1)^\nu = \frac{2}{\pi} \sum_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{\sin[(2\nu+1)u]}{2\nu+1},$$

Das entsprechende Intervall für u ist gegeben durch $0 \leqq u < \frac{\pi}{2}(1-\delta)$. Wir setzen $\upsilon = u + \frac{\pi}{2}$. Dann wird das Intervall für υ durch $\frac{\pi}{2} \leqq \upsilon < \pi.\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$ gegeben, und unsere Reihe geht über in

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{\nu}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{2\nu+1} = -\frac{2}{\pi}\sum_{\nu}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\upsilon\right]}{2\nu+1},$$

indem man den alternierenden Faktor durch eine Vermehrung des Winkels u um $\frac{\pi}{2}$ ersetzt. Die zu beweisende Konvergenz wird nicht gestört, wenn wir den Faktor $-\frac{2}{\pi}$ fortlassen und das Glied der Reihe für $\nu = 0$ hinzufügen. Es ist nun zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos[(2\nu+1).\upsilon]}{2\nu+1} \text{ für } \frac{\pi}{2} \leqq \upsilon < \pi\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$$

gleichmässig konvergiert. Bekanntlich konvergiert die Reihe

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu\upsilon}{\nu} = \lg\left(2\sin\frac{\upsilon}{2}\right)$$

für $0 < \upsilon < 2\pi$, d. h. in jedem Intervall, dessen Grenzen zwischen 0 und 2π liegen, ebenso die Reihe

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\nu\upsilon}{\nu}(-1)^{\nu} = \lg\left(2\cos\frac{\upsilon}{2}\right) \text{ für } -\pi < \upsilon < +\pi$$

gleichmässig. Durch Subtraktion erhält man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos[(2\nu+1)\upsilon]}{2\nu+1} = \frac{1}{2}\left\{\lg\left(2\cos\frac{\upsilon}{2}\right) - \lg\left(2.\sin\frac{\upsilon}{2}\right)\right\}$$

für $0 < \upsilon < \pi$. Aus diesem Intervall ist unser Intervall $\frac{\pi}{2} \leqq \upsilon < \pi\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$ nur ein Teil.

Hilfssatz d). Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\lambda_\nu s}{\lambda_\nu}\cdot(-1)^{\nu}$, *wo* $\lambda_\nu = \frac{\pi}{2}(2\nu+1)$ *ist, konvergiert für* $0 \leqq s < 1-\delta$ *gleichmässig, wenn* δ *eine beliebig kleine positive Grösse ist.*

Beweis: Es ist unsere Reihe gleich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2\nu+1)\,\pi\,.\,s}{2}\right)}{\lambda_\nu} \cdot (-1)^\nu =$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\left(\frac{\pi s}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{2\nu+1} =$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)\upsilon}{2\nu+1},$$

indem man den alternierenden Faktor durch eine Vermehrung des Argumentes um $\frac{\pi}{2}$ ersetzt und $\frac{\pi s}{2}+\frac{\pi}{2}$ υ einführt. Das entsprechende Intervall für υ ist $\frac{\pi}{2} < \upsilon < \pi\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$. Auch hier können wir den Faktor $\frac{2}{\pi}$ fortlassen und das $\nu = 0$ entsprechende Glied unserer Reihe hinzufügen. Die entstehende Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)\upsilon}{2\nu+1}$ konvergiert bekanntlich gleichmässig gegen $\frac{\pi}{4}$ für unser Intervall $\frac{\pi}{2} \leqq \upsilon < \pi.\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$.

§ 7. Anwendung auf das Beispiel des homogenen, schwingenden Stabes. (Beide Enden frei).

Bei dem Beispiele des homogenen Stabes,. der an beiden Enden frei schwingt, reduziert sich die Differentialgleichung 3) des § 2 auf

$$1) \qquad \frac{d^4\Phi}{dx^4} = \Lambda_i \,.\, \Phi(x),$$

da wir wegen der vorausgesetzten Homogeneität $p(x) = q(x) = 1$ setzen können. Die Eigenwerthe $-\Lambda_i$ sind in unserem Falle sämtlich negativ. Es kann daher zweckmässig

2) $\Lambda_i = \lambda_i^4$ eingeführt werden. Die Gleichung 1) besitzt nach Rayleigh Integrale, welche die Randbedingung III des § 1 für $\lambda = \lambda_\nu$ erfüllen, wenn λ_ν die positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$3) \qquad \cos\lambda \,.\, \mathfrak{Cof}\,\lambda = 1 \qquad \text{sind.}$$

Diese Integrale, zu denen man auch mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen gelangt, sind

$$4a) \qquad \psi_\nu(s) = (\sin\lambda_\nu - \mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu)[\cos\lambda_\nu\, s + \mathfrak{Cof}\,\lambda_\nu\, s] - (\cos\lambda_\nu - \mathfrak{Cof}\,\lambda_\nu)[\sin\lambda_\nu\, s + \mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu\, s]$$

oder wegen Gleichung 3).

$$4b) \qquad \psi_\nu(s) = (\cos\lambda_\nu - \mathfrak{Cof}\,\lambda_\nu)(\cos\lambda_\nu\, s + \mathfrak{Cof}\,\lambda_\nu\, s) + (\sin\lambda_\nu + \mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu)(\sin\lambda_\nu\, s + \mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu\, s).$$

Diese Funktionen werden dadurch, dass wir sie normieren d. h. mit dem Nenner $\sqrt{\int_0^1 \psi_\nu^{\,2}(x)\,.\,dx}$ versehen, zu unseren Eigenfunktionen φ_ν, welche die Integralgleichung

$$\varphi_\nu(s) = -\lambda_\nu^{\,4} \,.\, \int_0^1 K(s,t)\,.\,\varphi_\nu(t)\,.\,dt$$

erfüllen. Der Kern K(s,t) ist gegeben durch

$$5) \qquad \begin{aligned} K(s,t) = &-\frac{|s-t|^3}{12} + \frac{s^5t + st^5}{10} - \\ &- \frac{s^4t + st^4}{4} - \frac{s^5 + t^5}{20} + \frac{s^4 + t^4}{6} + \\ &+ \frac{s^2t + st^2}{4} - \frac{s^3 + t^3}{12} - \frac{13}{35}\,s\,.\,t \\ &+ \frac{11}{210}\,(s+t) - \frac{1}{105}\,. \end{aligned}$$

Man erhält ihn durch das im § 1 angegebene Verfahren, wenn wir die dortige Funktion $\Gamma(x,\xi)$ gleich $\frac{|x-\xi|^3}{12}$ nehmen.

Zur Normierung benutzen wir die von Rayleigh[1]) angegebene Gleichung

$$6) \qquad \int_0^1 \psi_\nu^2(x).dx = \frac{1}{4}.\psi_\nu^2(1)$$

Wir erhalten aus Gl. 4b) leicht

$$7) \qquad \psi_\nu(1) = 2\sin\lambda_\nu \,\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu .$$

Es wird demnach die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s).\varphi_\nu(t)}{-\Lambda_\nu} = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(s).\psi_\nu(t)}{(-\lambda_\nu^4).\int_0^1 \psi_\nu^2(x).dx}$$

den Kern K(s,t) darstellen, wenn es uns gelingt, die gleichmässige Konvergenz dieser Reihe nachzuweisen. Indem wir für ψ_ν aus Gl. 4b) und für $\int_0^1 \psi_\nu^2(x)dx$ aus Gl. 7) die Werte einsetzen, ausserdem die Klammern in dem Ausdruck für ψ_ν auflösen und entsprechende Glieder zusammenfassen, ergibt sich

$$8) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s).\varphi_\nu(t)}{-\Lambda_\nu} =$$

$$\frac{\cos\lambda_\nu(1-s)-\mathfrak{Cof}\lambda_\nu(1-s)-\cos\lambda_\nu s.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu+\sin\lambda_\nu s.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu+\sin\lambda_\nu\mathfrak{Sin}\lambda_\nu s-\cos\lambda_\nu\mathfrak{Cof}\lambda_\nu s].\psi_\nu(t}{(-\lambda_\nu^4).\qquad [\sin\lambda_\nu.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu]^2}$$

In gleicher Weise verfahren wir bei der Bildung der Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'(s).\varphi_\nu(t)}{-\Lambda_\nu}$, $\sum_\nu \frac{\varphi_\nu''(s).\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ und $\sum_\nu \frac{\varphi_\nu'''(s).\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$. Wir erhalten

$$9) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'(s).\varphi_\nu(t)}{-\Lambda_\nu} =$$

$$\frac{[\sin\lambda_\nu(1-s)+\mathfrak{Sin}\lambda_\nu(1-s)+\sin\lambda_\nu s.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu+\cos\lambda_\nu s.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu+\sin\lambda_\nu\mathfrak{Cof}\lambda_\nu s-\cos\lambda_\nu\mathfrak{Sin}\lambda_\nu s].\psi_\nu(t}{(-\lambda_\nu^3)\qquad [\sin\lambda_\nu.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu]^2}$$

[1]) **Rayleigh loc. cit. I. Abschnitt 164.**

$$10)\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu''(s)\cdot\varphi_\nu(t)}{-\Lambda_\nu} =$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[-\cos\lambda_\nu(1-s)-\mathfrak{Cof}\lambda_\nu(1-s)+\cos\lambda_\nu s.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu s-\sin\lambda_\nu s.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu s-\sin\lambda_\nu.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu s-\cos\lambda_\nu\mathfrak{Cof}\lambda_\nu s].\mathfrak{C}}{(-\lambda_\nu{}^2)\qquad [\sin\lambda_\nu\,.\,\mathfrak{Sin}\lambda_\nu]^2}$$

$$11)\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'''(s)\cdot\varphi_\nu(t)}{-\Lambda_\nu} =$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[-\sin\lambda_\nu(1-s)+\mathfrak{Sin}\lambda_\nu(1-s)-\sin\lambda_\nu s.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu-\cos\lambda_\nu s.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu-\sin\lambda_\nu.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu s-\cos\lambda_\nu\mathfrak{Sin}\lambda_\nu s].\mathfrak{C}}{(-\lambda_\nu)\qquad [\sin\lambda_\nu\,.\,\mathfrak{Sin}\lambda_\nu]^2}$$

Um die gleichmässige Konvergenz dieser Reihen und damit zugleich die Gültigkeit der Formeln A) bis E) des § 3 festzustellen, denken wir uns in sämtlichen Ausdrücken den Wert λ_ν nach dem Hilfssatz a) des § 6 durch $\frac{\pi}{2}(2\nu+1) - (-1)^\nu \cdot \frac{\beta}{e^{\frac{\pi}{2}(2\nu+1)}}$ ersetzt, wo β zwischen 0 und e liegt, und die einzelnen Glieder der Reihen nach den Zusatzgliedern von $\frac{\pi}{2}(2\nu+1)$ in Taylor'sche Reihen entwickelt. Man überzeugt sich leicht, dass die entstehenden Reihen, welche nach Potenzen von $\frac{\beta}{e^{\frac{\pi}{2}(2\nu+1)}}$ fortschreiten, absolut und gleichmässig konvergieren. Sie scheiden daher von der weiteren Untersuchung aus. In den obigen Reihen können wir jetzt λ_ν genau gleich $(2\nu+1).\frac{\pi}{2}$ nehmen. Die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihen 8) 9) und 10) geht aus einem Vergleiche mit den Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^4}$ bezw. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^3}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2}$ hervor, von deren Gliedern sich die Glieder unserer Reihen nur durch einen Faktor unterscheiden, welcher unter einer angebbaren, von ν,s und t

unabhängigen Grenze liegt. Denn jeder Summand, aus denen sich eine Funktion φ_ν zusammensetzt, ist nicht erheblich von 1 verschieden. Damit sind die Formeln A, B und C des § 3 bewiesen d. h. unsere Reihen 8), 9), 10) stellen die Werte K(s,t) bezw. $\frac{dK(s,t)}{ds}$ und $\frac{d^2K(s,t)}{ds^2}$ dar.

Wir betrachten die Reihe 11), in der nunmehr $\lambda_\nu = (2\nu + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ist, hinsichtlich ihrer Konvergenz. Jedes Glied dieser Reihe besteht, wie es aus der Schreibweise

$$12) \quad -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2}(2\nu+1)} \cdot \frac{[-\sin\lambda_\nu(1-s)+\mathfrak{Sin}\lambda_\nu(1-s)-\sin\lambda_\nu s.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu-\cos\lambda_\nu s.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu+(-1)^\nu\mathfrak{Cof}\lambda_\nu s]}{\mathfrak{Sin}\lambda_\nu} \cdot \frac{[\cos\lambda_\nu(1-t)-\mathfrak{Cof}\lambda_\nu(1-t)+\sin\lambda_\nu t.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu-\cos\lambda_\nu t.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu+(-1)^\nu\mathfrak{Sin}\lambda_\nu t]}{\mathfrak{Sin}\lambda_\nu}$$

ersichtlich ist, aus dem Produkte zweier Brüche, welches mit dem Faktor $\frac{1}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(2\nu+1)}$ versehen ist.

Jeder dieser beiden Brüche besteht aus fünf Gliedern, wenn wir uns sie in Summanden zerlegt denken. Die Reihen, welche aus dem ersten und zweiten Summanden des ersten Bruches gebildet werden können, konvergieren für $\varepsilon < s < 1-\varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine positive Grösse ist, absolut und gleichmässig. Es geht dies leicht aus einem Vergleich mit der in dem Hilfssatz b) des § 6 betrachteten Reihe $\frac{\mathfrak{Sin}\lambda_\nu s}{\mathfrak{Sin}\lambda_\nu}$ hervor, welche in demselben Intervall absolut und gleichmässig konvergiert. In dem letzten Gliede des ersten Bruches können wir uns $\mathfrak{Cof}(\lambda_\nu s)$ durch $\mathfrak{Sin}(\lambda_\nu s)$ ersetzt denken unter Vernachlässigung gleichmässig konvergenter Reihen. Die dem letzten Gliede jetzt entsprechende

Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu\, s}{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu}$ konvergiert aus dem gleichen Grunde wie die beiden vorigen Reihen absolut und gleichmässig. Da der zweite Bruch im ganzen Intervalle von $t = 0$ bis $t = 1$ unter einer angebbaren endlichen Grösse, die jedenfalls kleiner als 5 ist, unabhängig von ν und t bleibt, so sind die Reihen, welche aus den Produkten dieser drei Summanden des ersten Bruches mit dem zweiten Bruch und dem Faktor $\frac{1}{\frac{\pi}{2}(2\nu+1)}$ entstehen, umsomehr absolut und gleichmässig konvergent und scheiden daher aus der weiteren Untersuchung aus. Indem wir bemerken, dass der Quotient $\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda_\nu}{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu}$ — es genügt der Hinweis auf die Gleichungen

$$\mathfrak{Cot}\,\lambda_\nu = \frac{e^{\lambda_\nu} + e^{-\lambda_\nu}}{e^{\lambda_\nu} - e^{-\lambda_\nu}} = 1 + \frac{2}{e^{2\lambda_\nu} - 1}$$

— unter Vernachlässigung gleichmässig konvergenter Reihen durch 1 ersetzt werden kann, sieht man, dass das dritte und vierte Glied des ersten Bruches unter Hinzunahme des Faktors $\frac{1}{2\nu+1}$ die für $\varepsilon < s < 1-\varepsilon$ gleichmässig konvergenten Reihen

$$13) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\frac{\pi s}{2}\right]}{2\nu+1} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\frac{\pi s}{2}\right]}{2\nu+1}$$

bilden. In dem zweiten Gliede des zweiten Bruches können wir uns den $\mathfrak{Cof}$ durch $\mathfrak{Sin}$ ersetzt denken aus demselben Grunde, aus welchem oben der Quotient $\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda_\nu}{\mathfrak{Sin}\,\lambda_\nu}$ durch 1 ersetzt wurde. Wir vernachlässigen wiederum nur gleichmässig konvergente Reihen, wenn wir die beiden ersten Glieder des zweiten Bruches weglassen, da die aus ihnen gebildeten Reihen für $\varepsilon < t \leqq 1$, wo ε eine beliebig kleine

positive Grösse ist, selbst absolut und gleichmässig nach unserm Hilfssatz b) des § 6 konvergieren. Für $t = 0$ bleibt die gleichmässige Konvergenz der aus dem ersten Gliede des zweiten Bruches gebildeten Reihe bestehen, während das zweite Glied für $t = 0$ die vorhin betrachteten Reihen 13) nur mit dem Faktor -1 versieht. Wir betrachten ferner die durch Multiplikation der Reihen 13) mit dem letzten Gliede des zweiten Bruches entstehenden Reihen. Für $0 \leq t < 1-\varepsilon$ konvergiert die diesem letzten Gliede entsprechende Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\lambda_\nu t}{\mathfrak{Sin}\lambda_\nu}$ absolut und gleichmässig, wie dies aus dem Hilfssatz b) des § 6 hervorgeht. Somit kann für dieses Intervall das letzte Glied des zweiten Bruches bei der weiteren Untersuchung ausscheiden. Für $t = 1$ tritt zu den Reihen 13) der Faktor $(-1)^{\nu}$ zu den einzelnen Gliedern. Auch dann bleibt, wie es aus den Hilfssätzen c) und d) des § 6 hervorgeht, die gleichmässige Konvergenz der beiden Reihen für $\varepsilon < s < 1-\varepsilon$ erhalten. Es bleibt zur weiteren Untersuchung der Ausdruck

$$14) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[\sin\lambda_\nu s.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu + \cos\lambda_\nu s.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu].[\sin\lambda_\nu t.\mathfrak{Sin}\lambda_\nu - \cos\lambda_\nu t.\mathfrak{Cof}\lambda_\nu]}{(2\nu+1)\,.\,\mathfrak{Sin}^2\lambda_\nu} \,.$$

Wenn wir wie früher den $\mathfrak{Cof}$ durch $\mathfrak{Sin}$ ersetzen, so lässt sich der Ausdruck sehr vereinfachen. Wir erhalten

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin[\lambda_\nu (t-s)]}{2\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos\lambda_\nu (s+t)}{2\nu+3} \quad \text{oder, wenn man}$$

$$15) \qquad x = \frac{\pi}{2}(t-s) \qquad \text{und} \qquad y = \frac{\pi}{2}(s+t) \qquad \text{setzt,}$$

$$16) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin[(2\nu+1).x]}{2\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos[(2\nu+1).y]}{2\nu+1} \,.$$

Für s und t mögen die Annahmen

$$17) \qquad \varepsilon < s < 1-\varepsilon \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \qquad s \neq t$$

gelten, wodurch keine der bisher betrachteten gleichmässigen Konvergenzen gestört wird. Für dieses Intervall konvergiert die zweite der Reihen 16) gleichmässig, da ja bei unserer Annahme $s \neq t$ y weder Null noch den Wert π annehmen kann, also der Hilfssatz c) des § 6 anwendbar ist. Die dort untersuchte Reihe ist der hier betrachteten im wesentlichen gleich. Da wegen $s \neq t$ auch $\varepsilon < x < \pi - \varepsilon$ ist, so konvergiert auch die erste Reihe gleichmässig. Wegen der bewiesenen gleichmässigen Konvergenz der Reihe 11) unter den Annahmen 17) gilt die Beziehung

$$\frac{d^3 K(s,t)}{ds^3} = K'''(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'''(s) \cdot \varphi_\nu(t)}{-\lambda_\nu},$$

wo jetzt wieder unter λ_ν die Nullstellen der Gleichung $\cos\lambda . \mathfrak{Cof}\lambda = 1$ zu verstehen sind. Diese Beziehung gilt auch für $s = 0$ oder 1, da sowohl $K'''(0,t)$ bezw. $K'''(1,t)$ als auch $\sum_\nu \frac{\varphi_\nu'''(0) \cdot \varphi_\nu(t)}{-\lambda_\nu}$ bezw. $\sum_\nu \frac{\varphi_\nu'''(1) \cdot \varphi_\nu(t)}{-\lambda_\nu}$ verschwinden; denn der Kern und die Eigenfunktionen erfüllen die Randbedingung III. Damit ist die Formel D) des § 3 bewiesen.

Schliessen wir den Fall aus, dass s und t gleichzeitig gleich Null oder 1 werden, so ist die zweite der Reihen 16) innerhalb des ganzen Intervalles für s und t gleichmässig konvergent. Die erste der beiden Reihen 16) $\sum_\nu \frac{\sin(2\nu+1).x}{2\nu+1}$ ist bekanntlich, wenn wir noch das $\nu = 0$ entsprechende Glied hinzunehmen, gleich $\frac{\pi}{4}$, wenn $\varepsilon < x < \pi - \varepsilon$, gleich $-\frac{\pi}{4}$, wenn $-\pi + \varepsilon < x < \varepsilon$ ist, und gleich Null, wenn $x = 0$ ist. Sie nimmt daher für $x = 0$ oder $s = t$ den Mittelwert an. Die übrigen Glieder der Reihe $\sum_\nu \frac{\varphi_\nu'''(s) \cdot \varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ bilden für alle Werte von s und t im Intervall (0,1) gleichmässig konvergente und daher auch stetige Reihen, wie es eben gezeigt wurde. Es ist daher

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'''(t)\cdot\varphi_\nu(t)}{-\lambda_\nu} = \frac{1}{2}\left[\sum_\nu \frac{\varphi_\nu'''(t+\varepsilon)\cdot\varphi_\nu(t)}{-\lambda_\nu} + \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(t-\varepsilon)\cdot\varphi_\nu(t)}{-\lambda_\nu}\right],$$

wenn ε hinreichend klein genommen wird. Gemäss der Formel D ist aber

$$\sum_\nu \frac{\varphi_\nu'''(t+\varepsilon)\cdot\varphi_\nu(t)}{-\lambda_\nu} = K'''(t \pm \varepsilon, t).$$

Bezeichnen wir mit $f(x \pm 0)$ die Funktionswerte von $f(x)$, welche man erhält, wenn man sich von grösseren oder kleineren Werten her der Variabelen x nähert, so gilt innerhalb des ganzen Intervalles

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu'''(t)\cdot\varphi_\nu(t)}{-\lambda_\nu} = \frac{1}{2}\cdot[K'''(t+0,t)+K'''(t-0,t)],$$

unsere Formel E), welche zu beweisen war. Um noch die Richtigkeit der Formel F) zu beweisen, bilden wir die dritte Ableitung des Kernes K(s,t), welcher durch die Gleichung 5) dieses § gegeben ist. Wir erhalten

$$K'''(s,t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{d|s-t|}{ds} + 6ts^2 - 6ts - 3s^2 + 4s - \frac{1}{2}.$$

Es ist demnach $K'''(0+0,0) = -1$ und $K'''(1-0,1) = +1$, wodurch die Formel F) bewiesen ist.

Bei den übrigen Arten von Randbedingungen kann man ganz ähnliche Konvergenzbetrachtungen anstellen. In allen Fällen gelten die Hilfsformeln A) bis E) des § 3, durch welche die Anwendung der Kneserschen Methode gesichert ist.

§ 8. Anwendung einer zweiten Methode[1]) auf denselben Fall.

Es liege eine Funktion f(x) vor, die innerhalb des Intervalles (0,1) an einer endlichen Anzahl von Stellen $x = \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ mit ihren ersten vier Ableitungen unstetig sei und die Randbedingungen III des § 1 nicht erfülle, dagegen erforderlichen Falles mit den Gliedern $-c-b.x$ ver-

[1]) Vgl. Kneser: Integralgleichungen und Darstellung willkürlicher Funktionen nach zwei Variabeln. § 6 Rendiconti del Circolo matematico Di Palermo. Tomo XXVII. 1909.

sehen sei, wie sie am Ende des § 2 angegeben sind. Dadurch dass wir zu der gegebenen Funktion gewisse, mit Hilfe des Kernes K(s,t) des vorigen Abschnittes gebildete Funktionen addieren, welche selbst oder in ihren Ableitungen unstetig sind an denselben Stellen wie die gegebene Funktion, können wir erreichen, dass die neue Funktion sämtliche Bedingungen erfüllt, die gemäss § 1 zu ihrer Entwickelung nach den Eigenfunktionen des betreffenden Falles notwendig sind. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Funktionen

$$1) \qquad \frac{\partial^3 K(\xi,x)}{\partial \xi^3} = K'''(\xi,x),\ \frac{\partial^2 K(\xi,x)}{\partial \xi^2} = K''(\xi,x),$$
$$\frac{\partial K(\xi,x)}{\partial \xi} = K'(\xi,x) \quad \text{und} \quad K(\xi,x).$$

Beachten wir, dass bei dem Kerne K(ξ,x), der durch die Gleichung 5) des § 7 gegeben ist, Unstetigkeiten in den Ableitungen nur durch das erste Glied $-\frac{\xi-x|^3}{12}$ hervorgerufen werden, da die übrigen Glieder eine ganze rationale Funktion fünften Grades bilden, so erkennt man leicht, dass für $x = \xi$ die Funktionen

$$2) \qquad \frac{\partial^3 K(\xi,x)}{\partial \xi^3} = K'''(\xi,x),\ \frac{\partial^3 K(\xi,x)}{\partial \xi^2 . \partial x} = K''(\xi,x)',$$
$$\frac{\partial^3 K(\xi,x)}{\partial \xi . \partial x^2} = K'(\xi,x)'' \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 K(\xi,x)}{\partial x^3} = K(\xi,x)''',$$

welche die nullte bezw. erste, zweite oder dritte Ableitung nach x der Funktionen 1) darstellen, den Sprung + 1 aufweisen. Wir wollen sagen, eine Funktion f(x) erleidet den Sprung a, wenn der Funktionswert $\lim_{\varepsilon=0} f(x-\varepsilon)$ den Funktionswert $\lim_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon)$ um a übertrifft. Weist daher die gegebene Funktion f(x) an den Stellen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ Sprünge $a_1, a_2 \ldots a_n$ auf, so ist die Funktion

$$3) \qquad f(x) - \sum_{m=1}^{n} a_m . K'''(\xi_m, x)$$

stetig. Hat f(x) an denselben Stellen in der ersten Ableitung noch Unstetigkeiten von der Grösse b_1, $b_2 \ldots b_n$, so wird die Ableitung der Funktion 3) an diesen Stellen Sprünge b_1, $b_2 \ldots b_n$ erleiden, da die Ableitungen der Funktionen 2) keine Sprünge mehr aufweisen. Wir können diese Unstetigkeiten in der ersten Ableitung fortschaffen mit Hilfe der zweiten der Funktionen 1), welche an den Stellen ξ_m in ihrer ersten Ableitung den Sprung + 1 aufweist. Die Funktion

$$4) \qquad f(x) - \sum_{m=1}^{n} a_m . K'''(\xi_m, x) - \sum_{m=1}^{n} b_m . K''(\xi_m, x)$$

ist stetig mit ihrer ersten Ableitung, da $K''(\xi, x)$ überall stetig ist. Weitere Unstetigkeiten der Funktion 4) in der zweiten bezw. dritten Ableitung können wir mit Hilfe der dritten bezw. vierten der Funktionen 1) fortschaffen, welche für $x = \xi$ in der zweiten bezw. dritten Ableitung den Sprung 1 aufweisen, während sie selbst und ihre niederen Ableitungen stetig sind. Betragen daher die Sprünge der zweiten bezw. dritten Ableitung der Funktion f(x) c_1, $c_2 \ldots c_n$ bezw. d_1, $d_2 \ldots d_n$ an den Stellen $x = \xi_1$, $\xi_2 \ldots \xi_n$, so ist die Funktion

$$5) \qquad \begin{aligned} f(x) &- \sum_{m=1}^{n} a_m . K'''(\xi_m, x) - \sum_{m=1}^{n} b_m . K''(\xi_m, x) \\ &- \sum_{m=1}^{n} e_m . K'(\xi_m, x) - \sum_{m=1}^{n} d_m . K(\xi_m, x) \end{aligned}$$

mit ihren drei ersten Ableitungen stetig.

Beachtet man die Definitionsgleichung

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} K(x, \xi)}{\partial x^{\mu} . \partial \xi^{\nu}} = K^{(\mu)}(x, \xi)^{(\nu)},$$

so überzeugt man sich leicht durch Ausrechnen, dass die Funktionen

$$6) \qquad K(0, x), \text{ bezw. } K'(0,x), K(x, 1), K(x, 1)'$$

die Gleichungen

$$K(0,0+0)''' = -1, \text{ bezw. } K'(0,0+0)'' = +1,$$
$$K'''(1-0,1) = 1, \; K''(1-0,1)' = -1$$

erfüllen. Nimmt daher die zweite Ableitung der Funktion 5) an der Stelle $x = 0$ den Wert e an, so erreicht man durch Addition der Funktion $-e.K'(0, x)$ zu der Funktion 5), dass die neue Funktion in ihrer zweiten Ableitung für $x=0$ den Wert Null annimmt. In dieser Weise kann man fortfahren. Bei passender Wahl der Konstanten f, g, h kann man erreichen, dass die Funktion, welche aus der Addition der Funktion

6) $\quad -e.K'(0, x) + f.K(x, 1)' + g.K(0, x) - h.K(x, 1)$

zur Funktion 5) entsteht, auch die übrigen Randbedingungen erfüllt, d. h. dass die zweite und dritte Ableitung an beiden Enden verschwindet.

Die neue Funktion erfüllt alle Bedingungen, welche nach § 1 zu ihrer Entwickelung nach den Eigenfunktionen erforderlich sind. Denn sie weist erst in ihrer vierten Ableitung Unstetigkeiten auf und erfüllt die Randbedingungen. Da die Funktionen 1) und 6) gleichfalls sämtlich nach den Eigenfunktionen entwickelt werden können, so ist auch die Funktion f(x) nach den Eigenfunktionen des vorliegenden Falles entwickelbar. Wegen der Formeln D) und E) des § 3 wird an den Stellen, wo die Funktion f(x) eine endliche Unstetigkeit aufweist, durch die angegebene Entwickelung der Wert $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ dargestellt[1]).

Diese Methode lässt sich auch in den Fällen anwenden, wo an den Enden des Stabes andere Kombinationen der Randbedingungen zu erfüllen sind.

---

[1]) Während der Drucklegung wurde ich von Herrn Privatdoz. Dr. Cl. Schäfer freundlichst darauf aufmerksam gemacht, dass bereits i. J. 1899 Radakowič auf die Anregung Wirtinger's (Wien) hin in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie 108. Bd. S. 577 Abt. IIa das Problem der erzwungenen Schwingungen der Saite und des Stabes behandelt hat. Auch diese Arbeit beruht im wesentlichen ebenso wie die in der Einleitung auf S. 11 zitierte Abhandlung von Kriloff auf der Darstellung einer unstetigen Funktion, durch welche eine wandernde Last gegeben ist, nach den Eigenfunktionen.

Lebenslauf.

Ich, Ernst Juretzka, katholischen Glaubens, wurde am 14. April 1883 als Sohn des i. J. 1893 verstorbenen Elementarschullehrers Ernst Juretzka, und seiner Ehefrau Marie geb. Oculus zu Beuthen O. S. geboren. Nachdem ich die Volksschule in Beuthen und später in Tarnowitz besucht hatte, trat ich Ostern 1894 in das Kgl. Realgymnasium zu Tarnowitz ein, das ich nach neunjährigem Besuche mit dem Zeugnis der Reife verliess. Am 6. Mai 1903 an der Breslauer Universität immatrituliert, studierte ich Mathematik und Naturwissenschaften.

Während meiner Studienzeit habe ich an den Vorlesungen bezw. Uebungen der folgenden Herren Professoren und Privatdozenten teilgenommen:

Baumgartner, von dem Borne, Ebbinghaus, Frech, Herz, Hintze, Kneser, Ladenburg, Lummer, E. Neumann, Pringsheim, Rosanes, A. Sachs, Cl. Schäfer, Semrau, Sturm, Wätzmann, v. Wenckstern.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern spreche ich meinen aufrichtigen Dank aus. Ganz besonders fühle ich mich Herrn Prof. Dr. Kneser für die wissenschaftliche Anregung und sein jederzeit freundliches Wohlwollen zu dauernder Dankbarkeit verpflichtet.